Étude de $GL_n(\mathbb{K})$

ÉNONCÉ :
Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On munit $GL_n(\mathbb{K})$ de la topologie normique.

Théorème :
1. $GL_n(\mathbb{K})$ est un ouvert dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
2. $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe.

1. En notant $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$, l'application

$$\det : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ A & \longmapsto & \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \epsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1}\dots a_{\sigma(n),n} \end{array}$$

étant somme et produit de coefficients de A, elle est polynomiale et donc *a fortiori* continue. Or $GL_n(\mathbb{K}) = \det^{-1}(\mathbb{K}^*)$ avec $\mathbb{K}^*$ ouvert de $\mathbb{K}$, donc $GL_n(\mathbb{K})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ comme image réciproque par une application continue d'un ouvert.

Voyons qu'il existe $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de matrices de $GL_n(\mathbb{K})$ qui converge vers A. Le spectre sur $\mathbb{K}$ de la matrice A étant fini, il existe un $p_0 \in \mathbb{N}^*$ suffisamment grand tel que la matrice $A - \frac{1}{p}I_n$ soit inversible pour tout $p \geq p_0$, de sorte que $\left(A - \frac{1}{p_0}I_n\right)_{p\geq p_0}$ est une suite d'éléments de $GL_n(\mathbb{K})$. Ainsi, en posant $A_k = A - \frac{1}{p_0+k}I_n$ pour $k \in \mathbb{N}$, la suite $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ convient. D'où la densité de $GL_n(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

2. Considérons $A, B \in GL_n(\mathbb{C})$. L'application :

$$\det : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ A & \longmapsto & \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \epsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1}\dots a_{\sigma(n),n} \end{array}$$

étant polynomiale en les coefficients de A, l'application :

$$P : \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & \det((1-t)A + tB) \end{array}$$

est polynomiale en t. Remarquons que $P(0) = \det(A)$ et que $P(1) = \det(B)$. En particulier, P est non nul et possède ainsi un nombre fini de zéros dans $\mathbb{C}$. Notons $(\alpha_j)_{1\leq j\leq m}$ ses racines, et posons $\alpha_{\min} := \min\{\Im(\alpha_j) \mid \Im(\alpha_j) \neq 0, \quad 1 \leq j \leq m\}$ (On posera $\alpha_{\min} = i$ si toutes les parties imaginaires des racines de P sont nulles). On définit alors le chemin γ par :

$$\gamma : \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & \begin{cases} t + it\Im(\alpha_{\min}) & \text{si } t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ t + i(1-t)\Im(\alpha_{\min}) & \text{si } t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases} \end{array}$$

On a alors $P(\gamma(0)) = \det(A) \neq 0$ et $P(\gamma(1)) = \det(B) \neq 0$. De plus, pour tout $t \in]0,1[$, on a par construction que :

$$0 < \Im(\gamma(t)) \leq \frac{1}{2}\Im(\alpha_{\min}) < \Im(\alpha_{\min})$$

Ainsi, l'application α définie par :

$$\alpha : \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & GL_n(\mathbb{C}) \\ t & \longmapsto & (1-\gamma(t))A + \gamma(t)B \end{array}$$

est continue car γ l'est, à valeurs dans $GL_n(\mathbb{C})$. On a ainsi construit un chemin continu reliant A à B, éléments arbitraires de $GL_n(\mathbb{C})$, d'où la connexité par arcs et donc *a fortiori* la connexité de $GL_n(\mathbb{C})$.

Remarques :

- Le développement est relativement court (et facile) : on n'hésitera pas à insister sur les détails et illustrer le chemin γ que l'on construit.
- On admet que la propriété de connexité par arcs implique la propriété de connexité : il faut savoir le montrer.
- Quid de la connexité de $GL_n(\mathbb{R})$? : 2 composantes connexes homéomorphes.
- Une application de la densité de $GL_n(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: $\chi_{AB} = \chi_{BA}$ pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ quelconques.